ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2011
Institut National des Postes et Télécommunications
INPT

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Premier problème

Dans ce problème, I désigne l'un des intervalles $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$; a et b étant des réels tels que $a < b$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant $f(I) \subset I$; on suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Définition : un élément x de I est dit un point fixe de f si $f(x) = x$.

L'objet du problème est de montrer que f admet un unique point fixe dans I et de donner une méthode de calcul approché d'un tel point.

1ère partie
Existence du point fixe

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\quad u_0 \in I \quad$ et $\quad u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N}$.

1.1. Vérifier que les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont bien définis.

1.2. Cas où $I = [a, b]$

1.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$ et en déduire que

$$u_n - k^n(b - a) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n + k^n(b - a).$$

1.2.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + \alpha k^n(b - a)$ et $w_n = u_n - \alpha k^n(b - a)$. Comment choisir le réel α pour que les deux suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ soient adjacentes ?

1.2.3. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in [a, b]$.

1.2.4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - f(\ell)| \leqslant k|u_{n-1} - \ell|$. Conclure que ℓ est un point fixe de f.

1.3. Cas où $I = [a, +\infty[$

1.3.1. Montrer que les droites D et Δ d'équations respectives $y = f(a) + k(x - a)$ et $y = x$ sont concourantes en un point d'abscisse notée c avec $c \geqslant a$.

1.3.2. Si $c \neq a$, montrer que $a < c$ et que $f([a, c]) \subset [a, c]$.

1.3.3. Conclure que f admet un point fixe ; on pourra distinguer les cas $c = a$ et $c \neq a$.

1.4. Cas où $I =]-\infty, a]$

On pose $J = \{-x \; ; \; x \in I\}$ et $g(x) = f(-x)$, $x \in J$. Vérifier que la fonction g vérifie sur l'intervalle J les hypothèses de la question **0.4** précédente et conclure que f admet un point fixe dans I.

1.5. Cas où $I = \mathbb{R}$

1.5.1. On suppose que $f(0) > 0$ et on note c (resp. d) le point d'intersection de la droite d'équation $y = f(0) - kx$ (resp. $y = f(0) + kx$) avec la première bissectrice (d'équation $y = x$). Préciser les valeurs de c et d puis justifier que $f([c,d]) \subset [c,d]$ et en déduire que f admet un point fixe dans [c,d].

1.5.2. Envisager les deux cas restants et conclure que f admet un point fixe dans I.

2ème partie
Unicité du point fixe ; calcul approché

2.1. Montrer que si $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$, avec $(\ell_1, \ell_2) \in I^2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

2.2. Approximation du point fixe

On conserve les hypothèses faites sur f au début du problème et on note ℓ son l'unique point fixe. On rappelle que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est définie par :

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

2.2.1. Montrer que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $|u_{n+p} - u_n| \leqslant k^n \dfrac{1-k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$.

2.2.2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$.

2.3. Un exemple

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{2}$.

2.3.1. Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in \mathbb{R}$.

2.3.2. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Comment choisir l'entier naturel n pour que u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près ?

Deuxième problème

Ce deuxième problème est composé de deux parties largement indépendantes.

1ère partie
Étude d'une fonction

1.1. Montrer que la fonction $\arctan$ est développable en série entière au voisinage de 0 ; écrire son développement en série entière en précisant le rayon de convergence.

1.2. Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(t) = \frac{\arctan t}{t}.$$

Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0, noté encore g, et préciser $g(0)$.

1.3. On note f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

1.3.1. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, notée encore f, et expliciter $f(0)$.

1.3.2. Précisez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} z^{2n}$.

1.3.3. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n}$; on justifiera d'abord la convergence de la série.

1.3.4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.4. On cherche à exprimer $f(1)$ comme la somme d'une série.

1.4.1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ est convergente et donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une majoration de la quantité $\left| S - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right|$ où S désigne la somme de la série en question ; on précisera le théorème utilisé.

1.4.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1[$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \left(1 - x^{2k}\right) \right| \leqslant (1 - x^2) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^2}.$$

1.4.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1[$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leqslant \left(1 - x^2\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

1.4.4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

1.4.5. On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de l'intervalle $]0,1[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n(1 - x_n^2) = 1$; étudier la suite $\left(f(x_n) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right)_{n\geqslant 1}$ et en déduire que $f(1) = S$.

1.4.6. Donner une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-3} près. En déduire une valeur approchée de $f'(1)$.

1.5. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**

1.5.1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$.

1.5.2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi \ln x}{2x}$.

On pourra remarquer que, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt + \dfrac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt$.

1.5.3. En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et préciser la limite de f en $+\infty$.

1.6. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\pi \ln x}{2x} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{1}{x^{2n+2}}$ puis en déduire une approchée de $f(5)$ à 10^{-3} près.

1.7. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dessiner l'allure de sa courbe représentative.

2ème partie
Résolution d'une équation différentielle

On note I l'un des intervalle $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ et on considère l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0. \qquad (\mathcal{H})$$

2.1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour que la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ soit une solution sur I de $(\mathcal{H})$.

2.2. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de $(\mathcal{H})$.

2.3. Préciser l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$.

2.4. L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ autres que la solution nulle ?

2.5. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{L})$

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (\mathcal{L})$$

2.6. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions sur I de l'équation $(\mathcal{L})$ et le préciser.

2.7. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 ; on précisera les coefficients de cette série entière ainsi que son rayon de convergence.

2.8. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la préciser.

FIN DE L'ÉPREUVE